GLOBAL FUNCIONES, LÍMITES Y CONTINUIDAD **Mayo 2004**

1.- Halla los dominios de las siguientes funciones:

a) $f(x)=\sqrt{3x-x^2}$ b) $g(x)=\dfrac{2x+1}{x^3-x^2-4}$ c) $h(x)=2^{x^2-1}$

2.- Dadas las funciones: $f(x)=\dfrac{3x}{x-1}$ $g(x)=x^2$ Calcula:

a) $f\circ g$ b) $g\circ f$ c) f^{-1}

3- Estudia la continuidad de la función: $f(x)=\begin{cases}3 & si\ x\le -2\\ x^2 & si\ -2<x<3\\ 2x+3 & si\ x\ge 3\end{cases}$ y represéntala gráficamente. ¿Cuál es su dominio?

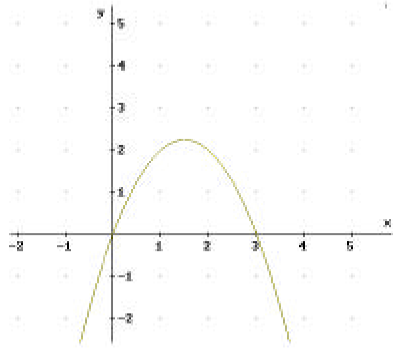
4.- Dada la función $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x+2}$ halla sus asíntotas y haz un esbozo de su gráfica.

5.- Estudia la continuidad de las siguientes funciones y clasifica sus discontinuidades:

a) $f(x)=\dfrac{x^2-2x}{x^2-3x+2}$ b) $g(x)=\sqrt{2x+1}$

PUNTUACIÓN: 2 PUNTOS CADA EJERCICIO

SOLUCIONES



1.- a) $f(x) = \sqrt{3x - x^2}$

$3x - x^2 \geq 0$

$y = 3x - x^2$

Corte ejes: OY: $x = 0 \Rightarrow y = 0$

OX: $3x - x^2 = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 3 \end{cases}$

Vértice $\left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ Sol: $[0,3]$ Dominio(f) = $[0,3]$

b) $g(x) = \dfrac{2x+1}{x^3 - x^2 - 4}$ función racional, resolvemos $x^3 - x^2 - 4 = 0$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & -1 & 0 & -4 \\ 2 & & 2 & 2 & 4 \\ \hline & 1 & 1 & 2 & 0 \end{array}$$

$x^2 + x + 2 = 0 \Rightarrow x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{1-8}}{2}$ = No tiene solución

Dominio (g) = $\Re - \{2\}$

c) $h(x) = 2^{x^2-1}$, función exponencial (el exponente un polinomio), luego Dom(h)= $\Re$

2.- a) $(f \circ g)(x) = f[g(x)] = f(x^2) = \dfrac{3x^2}{x^2 - 1}$

b) $(g \circ f)(x) = g[f(x)] = g\left(\dfrac{3x}{x-1}\right) = \left(\dfrac{3x}{x-1}\right)^2 = \dfrac{9x^2}{(x-1)^2}$

c) $y = \dfrac{3x}{x-1} \Rightarrow x = \dfrac{3y}{y-1} \Rightarrow x(y-1) = 3y \Rightarrow xy - x = 3y \Rightarrow$

$\Rightarrow xy - 3y = x \Rightarrow y(x-3) = x \Rightarrow y = \dfrac{x}{x-3} \Rightarrow f^{-1}(x) = \dfrac{x}{x-3}$

3.- $f(x) = \begin{cases} 3 & si\ x \leq -2 & \text{semirrecta horizontal, continua} \\ x^2 & si\ -2 < x < 3 & \text{trozo de parábola, continua} \\ 2x+3 & si\ x \geq 3 & \text{semirrecta, continua} \end{cases}$

habrá que ver qué pasa en los puntos de "enganche", es decir en –2 y 3.

En x = -2:

$\lim_{x \to -2^+} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^2) = (-2)^2 = 4$

$\lim_{x \to -2^-} f(x) = \lim_{x \to -2} (3) = 3$ discontinuidad de salto finito en $x = -2$

$f(-2) = 3$

En x = 3:

$\lim_{x \to 3^+} f(x) = \lim_{x \to 3} (2x+3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

$\lim_{x \to 3^-} f(x) = \lim_{x \to 3} (x^2) = 3^2 = 9$ continua en $x = 3$

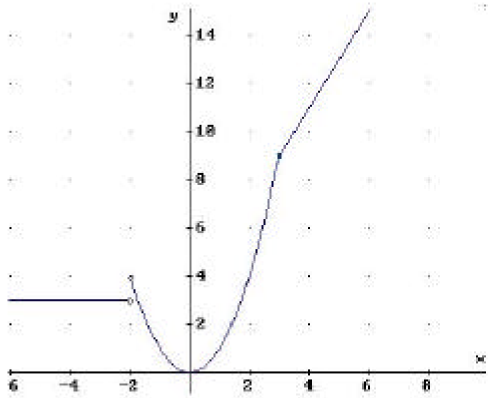
$f(3) = 2 \cdot 3 + 3 = 9$

luego, la función f es continua

en $\Re - \{-2\}$

y su dominio es $\Re$, ya que está definida en todos los puntos.

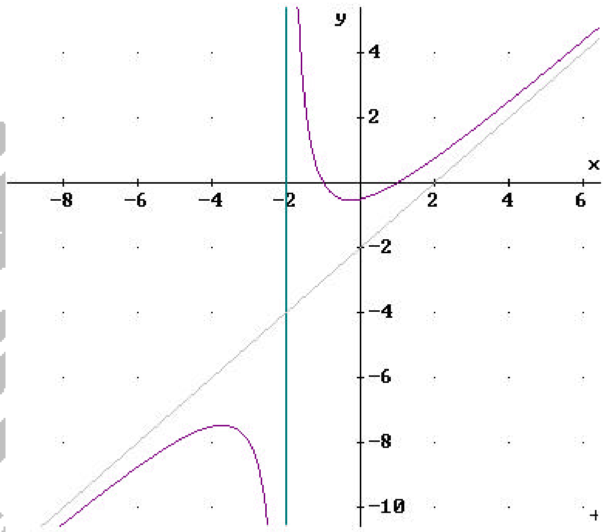
Su gráfica está formada por una semirrecta horizontal (y=3), un trozo de la parábola fundamental ($y = x^2$) y otra semirrecta.



4.- $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x + 2}$

Asíntota vertical $x = -2$

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to -2^+} \dfrac{x^2 - 1}{x + 2} = \dfrac{3}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -2^-} \dfrac{x^2 - 1}{x + 2} = \dfrac{3}{0^-} = -\infty \end{cases}$$



Asíntota oblicua:

$$\begin{array}{rrr|l} x^2 & & -1 & x \quad +2 \\ \hline -x^2 & -2x & & x \quad -2 \\ \hline & -2x & -1 & \\ & +2x & +4 & \\ \hline & & 3 & \end{array}$$

$$\frac{x^2 - 1}{x + 2} = \frac{(x + 2)(x - 2) + 3}{x + 2} = x - 2 + \frac{3}{x + 2}$$

asíntota oblicua $y = x - 2$, para ver la posición de la curva respecto de ella, vemos que pasa con $\dfrac{3}{x + 2}$ para valores muy grandes de x y para valores muy pequeños, con lo que tenemos que por la parte derecha, la curva está por encima de la asíntota y por la izquierda está por debajo.

5.- a) $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2}$ como es una función racional, el único problema lo tendrá cuando $x^2 - 3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \left\langle \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} \right.$,habrá que ver qué pasa en cada caso.

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 1^-} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty \end{cases} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = \dfrac{0}{0} \\ \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 2x}{x^2 - 3x + 2} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x(x - 2)}{(x - 1)(x - 2)} = \lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x}{x - 1} = 2 \end{cases}$$

discontinuidad de salto infinito en 1 y discontinuidad evitable en 2

b) $g(x) = \sqrt{2x + 1}$ Será continua en su dominio, es decir, cuando $2x + 1 \geq 0$

o sea, que la función g es continua en $\left[-\dfrac{1}{2}, +\infty \right)$